

ΛΥΣΗ ΘΕΜΑΤΟΣ

α. $(e^x + 2)f'(x) = e^x(1 - f(x)) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (e^x + 2)f'(x) + e^x f(x) = e^x \xrightarrow{\Sigma.\Theta.\text{M.T}} ((e^x + 2)f(x))' = (e^x)'$$

Άρα $(e^x + 2)f(x) = e^x + c$

Για $x=0$ έχουμε $3 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) = 1 + c \Leftrightarrow c = -2$

Συνεπώς προκύπτει $(e^x + 2)f(x) = e^x - 2 \Leftrightarrow f(x) = \frac{e^x - 2}{e^x + 2}$ για κάθε $\mathbb{R}$

β. $f'(x) = \frac{e^x(e^x + 2) - e^x(e^x - 2)}{(e^x + 2)^2} = \frac{e^x(e^x + 2 - e^x + 2)}{(e^x + 2)^2} = \frac{4e^x}{(e^x + 2)^2}$

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{4e^x(e^x + 2)^2 - 2(e^x + 2)4e^{2x}}{(e^x + 2)^4} = \frac{4e^x(e^x + 2)(e^x + 2 - 2e^x)}{(e^x + 2)^4} = \\ &= \frac{4e^x(e^x + 2)(2 - e^x)}{(e^x + 2)^4} = \frac{4e^x(2 - e^x)}{(e^x + 2)^3} \end{aligned}$$

x	$-\infty$	$\ln 2$	$+\infty$
f''	+	$\bigcirc$	-
f'			

για $x=\ln 2$ ο ρυθμός μεταβολής γίνεται μέγιστος επομένως η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο $(\ln 2, f(\ln 2))$ είναι :

$$y - f(\ln 2) = f'(\ln 2)(x - \ln 2) \Leftrightarrow y = \frac{x}{2} - \frac{\ln 2}{2}$$

γ. Για $x \in (-\infty, \ln 2]$ η f είναι κυρτή συνεπώς ισχύει $f(x) \geq y$ επομένως το ζητούμενο εμβαδόν είναι:

$$\begin{aligned} E &= \int_0^{\ln 2} |f(x) - y| dx = \int_0^{\ln 2} \left(\frac{e^x - 2}{e^x + 2} - \frac{x}{2} + \frac{\ln 2}{2} \right) dx = \\ &= \int_0^{\ln 2} \left(\frac{2e^x}{e^x + 2} - \frac{e^x + 2}{e^x + 2} - \frac{x}{2} + \frac{\ln 2}{2} \right) dx = \left[2 \ln(e^x + 2) - x - \frac{x^2}{4} + \frac{\ln^2 2}{2} x \right]_0^{\ln 2} = \\ &= 2 \ln 4 - \ln 2 - \frac{\ln^2 2}{4} + \frac{\ln^2 2}{2} - 2 \ln 3 = 4 \ln 2 - \ln 2 + \frac{\ln^2 2}{4} - 2 \ln 3 \\ &= 3 \ln 2 + \frac{\ln^2 2}{4} - 2 \ln 3 = \ln 8 + \frac{\ln^2 2}{4} - \ln 9 = \ln \frac{8}{9} + \frac{\ln^2 2}{4} \end{aligned}$$

δ. Για $x \in (\alpha, \beta)$ ισχύει για την συνάρτηση f το Θ.Μ.Τ. συνεπώς υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}$.

Επίσης η f είναι γνησίως αύξουσα για κάθε $x \in \mathbb{R}$ επομένως:

$$f(\mathbb{R}) = \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right) = (-1, 1)$$

$$\text{Άρα ισχύει } -1 < f(\alpha) < 1 \Leftrightarrow -1 < -f(\alpha) < 1 \quad (1)$$

$$\text{Και } -1 < f(\beta) < 1 \quad (2)$$

Συνεπώς αν κάνουμε πρόσθεση κατά μέλη των σχέσεων (1) και (2) προκύπτει:

$$-2 < f(\beta) - f(\alpha) < 2 \stackrel{\beta > \alpha}{\Leftrightarrow} -\frac{2}{\beta - \alpha} < \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} < \frac{2}{\beta - \alpha} \text{ άρα έχουμε}$$

$$f'(\xi) < \frac{2}{\beta - \alpha} \Leftrightarrow \frac{4e^\xi}{(e^\xi + 2)^2} < \frac{2}{\beta - \alpha} \Leftrightarrow 4e^\xi(\beta - \alpha) < 2(e^\xi + 2)^2$$

Επιμέλεια: Θωμόγλου Γιάννης – Μαθηματικός
Φροντιστήρια ΒΑΦΕΙΑΔΑΚΗΣ