

ΛΥΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΟΣ

$$\alpha. \text{ Έχουμε: } \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \begin{cases} -\infty, & \text{αν } f(0) < 1 \\ 0, & \text{αν } f(0) = 1 \\ +\infty, & \text{αν } f(0) > 1 \end{cases}$$

Τότε: Αν $f(0) < 1$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{g(x)} = \lim_{u \rightarrow -\infty} e^u = 0$, απορρίπτεται

$$\text{Αν } f(0) = 1, \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{g(x)} = \lim_{u \rightarrow 0} e^u = 1, \text{δεκτή}$$

$$\text{Αν } f(0) > 1, \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{g(x)} = \lim_{u \rightarrow +\infty} e^u = +\infty, \text{απορρίπτεται}$$

$$\text{Άρα } f(0) = 1$$

$$f'(x)(f(x) + x) + f(x) = 0$$

$$\beta. f'(x)f(x) + xf'(x) + f(x) = 0$$

$$\left(\frac{f^2(x)}{2} + xf(x) \right)' = 0$$

$$\text{άρα από το θεώρημα στις ΣΘΜΤ προκύπτει } \frac{f^2(x)}{2} + xf(x) = c$$

$$\text{για } x = 0 \text{ έχουμε } c = \frac{1}{2}$$

$$\text{Ισοδύναμα έχουμε: } \frac{f^2(x)}{2} + xf(x) = \frac{1}{2} \Rightarrow f^2(x) + 2xf(x) = 1$$

$$f^2(x) + 2xf(x) + x^2 = x^2 + 1$$

$$[f(x) + x]^2 = x^2 + 1$$

$$\text{Θέτω } g(x) = f(x) + x \text{ οπότε } g^2(x) = x^2 + 1$$

$$g(x) = 0 \Leftrightarrow g^2(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 + 1 = 0, \text{αδύνατη.}$$

Επομένως η g είναι συνεχής ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων και

$g(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Δηλαδή διατηρεί σταθερό πρόσημο.

Επιπλέον $g(0) = f(0) = 1 > 0$, άρα $g(x) > 0$.

Συνεπώς: $|g(x)| = \sqrt{x^2 + 1}$

$$g(x) = \sqrt{x^2 + 1}$$

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - x, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

γ.

Αρκεί να δείξουμε ότι $f'(x) < 0$.

Έχουμε:

$$f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} - 1 = \frac{x - \sqrt{x^2 + 1}}{\sqrt{x^2 + 1}} = -\frac{f(x)}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

Όμως:

$$\sqrt{x^2 + 1} > \sqrt{x^2} = |x| \geq x.$$

$$\text{Επομένως } \sqrt{x^2 + 1} - x > 0 \Leftrightarrow f(x) > 0 \Leftrightarrow -f(x) < 0$$

$$\text{Επίσης } \sqrt{x^2 + 1} > 0.$$

$$\text{Άρα } f'(x) < 0.$$

δ.

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{dx}{dt} \text{ χρησιμοποιώντας κανόνα αλυσίδας προκύπτει}$$

$$\Leftrightarrow \frac{d(\sqrt{x^2 + 1} - x)}{dx} \frac{dx}{dt} = -\frac{dx}{dt} \stackrel{\frac{dx}{dt} > 0}{\Leftrightarrow} \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} - 1 = -1 \Leftrightarrow x = 0.$$

Άρα τα ζητούμενο σημείο είναι το $A(0,1)$