

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ' ΤΑΞΗΣ

ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΕΠΑΛ (ΟΜΑΔΑ Α')

& ΜΑΘΗΜΑΤΩΝ ΕΙΔΙΚΟΤΗΤΑΣ

ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΕΠΑΛ (ΟΜΑΔΑ Β')

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ ΕΞΕΤΑΣΗΣ:

21 / 05 / 2015

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:

Μαθηματικά Ι

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ

ΘΕΜΑ Α

A₁. Θεωρία σχ. βιβλίου σελ 212

A₂. α) Λ

β) Σ

γ) Λ

δ) Λ

ε) Σ

A₃. α) $\int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{x} dx = [\ln x]_{\alpha}^{\beta} = \ln \beta - \ln \alpha$, $\beta > \alpha > 0$

β) $(c)' = 0$, αν c σταθερά

γ) $\bar{x} = \frac{v_1 x_1 + v_2 x_2 + \dots + v_k x_k}{v}$

ΘΕΜΑ Β

B₁

[-)	k_i	v_i	N_i	$k_i \cdot v_i$	$(k_i - \bar{x})^2 \cdot v_i$
5 - 15	10	20	20	200	2000
15 - 25	20	14	34	280	0
25 - 35	30	12	46	360	1200
35 - 45	40	4	50	160	1600
ΣΥΝΟΛΑ		50		1000	4800

Ξέρουμε ότι $N_1 = v_1$ άρα $N_1 = 20$

με τη βοήθεια του τύπου $v_i = N_i - N_{i-1}$ υπολογίζουμε ότι:

$$v_2 = 34 - 20 \Leftrightarrow \boxed{v_2 = 14}, \quad v_4 = 50 - 46 \Leftrightarrow \boxed{v_4 = 4}$$

και με τη βοήθεια του τύπου $N_i = N_{i-1} + v_i$ υπολογίζουμε ότι:

$$N_3 = N_2 + v_3 = 34 + 12 = 46.$$

Για τις κεντρικές τιμές ξέρουμε ότι ισούνται με το ημιάθροισμα των άκρων, επομένως έχουμε: $k_1 = 10, k_2 = 20, k_3 = 30, k_4 = 40$,

$$B_2 \quad \bar{x} = \frac{k_1 \cdot v_1 + k_2 \cdot v_2 + k_3 \cdot v_3 + k_4 \cdot v_4}{v} = \frac{1000}{50} = 20$$

$$\begin{aligned} B_3 \quad s^2 &= \frac{(\bar{x} - x_1)^2 v_1 + (\bar{x} - x_2)^2 v_2 + (\bar{x} - x_3)^2 v_3 + (\bar{x} - x_4)^2 v_4}{v} = \\ &= \frac{(20 - 10)^2 \cdot 20 + (20 - 20)^2 \cdot 14 + (20 - 30)^2 \cdot 12 + (20 - 40)^2 \cdot 4}{50} = \frac{2000 + 0 + 1200 + 1600}{50} = \frac{4800}{50} = 96 \end{aligned}$$

Άρα $s^2 = 96$. Οπότε $s = \sqrt{s^2} = \sqrt{96} \cong 10$

$$B_4 \quad CV = \frac{s}{\bar{x}} \cdot 100 = \frac{10}{20} \cdot 100 = 50\%$$

ΘΕΜΑ Γ

$$Γ1. \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (4x + 4e^{x-2}) = 4 \cdot 2 + 4 \cdot e^{2-2} = 8 + 4 \cdot 1 = 12$$

$$Γ2. \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^3 - 8}{\lambda x - 2\lambda} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(x-2) \cdot (x^2 + 2x + 4)}{\lambda(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(x^2 + 2x + 4)}{\lambda} = \frac{2^2 + 2 \cdot 2 + 4}{\lambda} = \frac{12}{\lambda}$$

$$Γ3. \text{ Για να είναι η } f \text{ συνεχής στο } x_0 = 2 \text{ θα πρέπει να ισχύει: } \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = f(2).$$

$$\text{Επομένως έχουμε: } 12 = \frac{12}{\lambda} \Leftrightarrow 12\lambda = 12 \Leftrightarrow \boxed{\lambda = 1}.$$

Γ4. Για $\lambda = 1$ έχουμε: $f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 - 8}{x - 2}, & \text{αν } x > 2 \\ 4x + 4e^{x-2}, & \text{αν } x \leq 2 \end{cases}$, υπολογίζουμε λοιπόν το ολοκλήρωμα:

$$\int_1^2 f(x) dx = \int_1^2 (4x + 4e^{x-2}) dx = \left[2x^2 + 4e^{x-2} \right]_1^2 = (2 \cdot 2^2 + 4e^{2-2}) - (2 \cdot 1^2 + 4e^{1-2}) =$$

$$(8 + 4e^0) - (2 + 4e^{-1}) = 12 - 2 - 4 \cdot \frac{1}{e} = 10 - \frac{4}{e} = \frac{10e - 4}{e}$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1 Ο ρυθμός μεταβολής του βάρους του παγόβουνου δίνεται από την παράγωγο της συνάρτησης B . Δηλαδή :

$$B'(t) = -3\frac{t^2}{3} + 2 \cdot 2t + 12, \quad t \in [0, 10] \Leftrightarrow B'(t) = -t^2 + 4t + 12, \quad t \in [0, 10]$$

Δ2 Από τη μελέτη μονοτονίας - ακροτάτων της συνάρτησης B , έχουμε:

$$B'(t) = 0, \quad t \in [0, 10]$$

$-t^2 + 4t + 12 = 0$ υπολογίζοντας την διακρίνουσα βρίσκουμε $\Delta = 64$ και στη συνέχεια τις ρίζες: $t = -2$ ή $t = 6$, επειδή $t > 0$ δεκτή ρίζα είναι η $t = 6$.

Από τον πίνακα προσήμων έχουμε:

t	0	6	10
B'	+	○	-
B			

Άρα τη χρονική στιγμή $t = 6$ το βάρος του παγόβουνου γίνεται μέγιστο.

Δ3. Για $t \in [6, 9]$ η συνάρτηση $B(t)$ είναι γνησίως φθίνουσα, συνεπώς έχουμε:

$$6 \leq t \leq 9 \Leftrightarrow B(6) \geq B(t) \geq B(9) \Leftrightarrow B(9) \leq B(t) \leq B(6)$$

Δ4. Ο ρυθμός μεταβολής του βάρους του παγόβουνου, γίνεται μέγιστος τη χρονική στιγμή που, ισχύει: $B''(t) = 0$.

Έχουμε $B''(t) = -2 \cdot t + 4$, οπότε : $B''(t) = 0 \Leftrightarrow -2 \cdot t + 4 = 0 \Leftrightarrow 2 \cdot t = 4 \Leftrightarrow \boxed{t = 2}$

t	0	2	10
B''	+	○	-
B'			

Άρα τη χρονική στιγμή $t = 2$ ο ρυθμός μεταβολής του βάρους του παγόβουνου γίνεται μέγιστος