

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ' ΤΑΞΗΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
& ΕΠΑΛ (ΟΜΑΔΑ Β')

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ ΕΞΕΤΑΣΗΣ: 18/05/2016

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: **ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ**

ΠΡΟΧΕΙΡΕΣ
ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ

Θέμα Α

A₁. Σx . βιβλίο σελ. 262 - 263

A₂. Σx . βιβλίο σελ. 141

A₃. Σx . βιβλίο σελ. 246

A₄. α) Λ

β) Σ

γ) Λ

δ) Σ

ε) Σ



Θεμα Β

Β1. ∂ f παραγωγίσιμη ως ρητή στο $\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(x^2)'(x^2+1) - x^2 \cdot (x^2+1)'}{(x^2+1)^2} = \\ &= \frac{2x(x^2+1) - x^2 \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \\ &= \frac{2x^3 + 2x - 2x^3}{(x^2+1)^2} = \frac{2x}{(x^2+1)^2} \end{aligned}$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f'	-	+	
f			

∂ f είναι γν. αύξουσα στο $[0, +\infty)$ κ
γν. φθίνουσα στο $(-\infty, 0]$.

Παρουσιάζει τ.ελαχ στο $x_0=0$ το $f(0)=0$

Β2. ∂ f' παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως ρητή

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{(2x)' \cdot (x^2+1)^2 - 2x \cdot [(x^2+1)^2]'}{(x^2+1)^4} = \\ &= \frac{2(x^2+1)^2 - 2x \cdot 2(x^2+1) \cdot 2x}{(x^2+1)^4} = \\ &= \frac{2(x^2+1)(x^2+1 - 4x^2)}{(x^2+1)^4} = \frac{2(1-3x^2)}{(x^2+1)^3} \end{aligned}$$

$$1 - 3x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{3} \Rightarrow x = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$$

x	$-\infty$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$+\infty$
f''	-	+	-	
f				
		$\Sigma.κ$	$\Sigma.κ$	

Η f κυρτή στο $[-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}]$

Η f κοίλη στο $(-\infty, -\frac{\sqrt{3}}{3}]$ και στο $[\frac{\sqrt{3}}{3}, +\infty)$.

Η f παρουσιάζει σημεία καμπής στο

$$x_1 = -\frac{\sqrt{3}}{3} \text{ το } f(x_1) = f\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2}{\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 + 1} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{3} + 1} = \frac{1}{4}$$

$$\text{και στο } x_2 = \frac{\sqrt{3}}{3} \text{ το } f(x_2) = f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{1}{4}.$$

B3)

Αφού $A_f = \mathbb{R}$ η C_f δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x^2+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{x^2+1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1$$

Συνεπώς η f έχει οριζόντια ασύμπτωτη την $(\varepsilon): y=1$ στο $+\infty$ κ στο $-\infty$.

Επειδή έχει οριζόντιες ασύμπτωτες δεν έχει πλάγιες.



B4] Με βάση τις απαντήσεις στα B1, B2, B3
 σχηματίζουμε τον πίνακα μεταβολών της f
 και χαράζουμε την γραφική της παράσταση.

x	$-\infty$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$+\infty$
f'		-	-	0	+
f''		-	0	+	+
f	1		$\frac{1}{4}$ I.K		0 T.E

